සාධනය කරන ක්‍රම

ආචාර්ය ජී.එච්. ජයන්ත ලානෙල්
ජ්‍යෙෂ්ඨ කථිකාචාර්ය
ගණිත අධ්‍යනාංශය
ශ්‍රී ජයවර්ධනපුර විශ්වවිද්‍යාලය

පටුන

- සාධනය යනු කුමක්ද?
- සෘජු සාධනය (Direct Proof)
- විසංවාදය මඟින් සාධනය (Proof by Contradiction)
- ප්‍රතිවිරුද්ධය(Contrapositive)මඟින් සාධනය
- ගණිත අභ්‍යුහනය (Mathematical Induction)
- සිද්ධි මඟින් සාධනය (Proof by Cases)
- තුල්‍යතාවයෙහි සාධනය (Proof of Equivalence)
- සාධනයේදී සිදුවන පොදු වැරදි

සාධනය යනු කුමක්ද?

- සාධනයක් යනු ප්‍රමේයක සත්‍යයතාවය නිර්ණය කරන වලංගු තර්කයකි (නිගමනය ලෙස).

- සාධනයක් තුළ ප්‍රකාශනයකට ප්‍රත්‍යක්ෂ (axioms) (සත්‍ය ලෙස උපකල්පනය කළ හැකි), තර්ක සහ කලින් ඔප්පු කරන ලද ප්‍රමේයන් ඇතුලත් වේ.

- නිගමන නීති සහ නියමයන්, නිර්වචන, අනෙකුත් ප්‍රකාශනයන්ගෙන් සාධනයේ පියවර අතර සම්බන්ධය පවත්වා ගනිමින් අතරමැදි නිගමන ලබා ගනී.

- අවසාන පියවර වන්නේ ප්‍රමේයයේ නිගමන තහවුරු කිරීමයි.

අදාළ යෙදුම්

- උපසාධ්‍යය (Lemma)
  - මෙවැනි ප්‍රමේයන් ඉතා වැදගත් නොවේ. සමහර අවස්ථාවලදී අපට උපසාධ්‍යය කිහිපයක් මගින් ප්‍රමේයක සාධනය ලබා ගත හැකිය.

- උපප්‍රමේයය (Corollary)
  - තහවුරු කර ඇති ප්‍රමේයයක් මගින් පහසුවෙන් ස්ථාපිත කළ හැකි ප්‍රමේයකි.

අදාළ යෙදුම්

- ඌහනය (Conjecture)
  - පාර්ශවීය සාක්ෂි මත පදනම්ව හෝ විශේෂඥයෙකුගේ දෘෂ්ටිය මත පදනම් වූ සත්‍යය ප්‍රකාශයක් ලෙස යෝජනා කළ ප්‍රකාශනයකි.

සාධනයේ ක්‍රම

1. ඍජු සාධනය (Direct Proof)

$$p \rightarrow q$$

- ප්‍රථමයෙන් p සත්‍යය බව උපකල්පනය කරයි.
- ප්‍රත්‍යක්ෂ (axioms), අර්ථ නිරූපණ, කලින් ඔප්පු කරන ලද න්‍යායන්, නිගමනවල නීතිරීති භාවිතා කරමින් q යන්න සත්‍යය වන බව පෙන්වයි.

- ඉහත සාධනයේ අරමුණ වන්නේ p සත්‍ය විට q කිසිවිට අසත්‍ය නොවන බවයි. එනම්, q සත්‍ය වන බවයි.

- එනම් $p \to q$ සැම විටම සත්‍ය වේ.

- **උදාහරණය 1:** n ඔත්තේ නිඛිල සංඛ්‍යාවක් වන විට n^2 ඔත්තේ බව සාධනය කරන්න.

- **උදාහරණය 2:** a, b වර්ග සංඛ්‍යා වන විට ab වර්ග සංඛ්‍යාවක් බව සාධනය කරන්න.

- **උදාහරණය 3:** α, β අනුගාමී නිඛිල සංඛ්‍යා වන විට $\alpha + \beta$ ඔත්තේ සංඛ්‍යාවක් බව සාධනය කරන්න.

2. විසංවාදය මඟින් සාධනය (Proof by Contradiction)

- මෙම ක්‍රමය මඟින් සාධනය සඳහා පහත සමානත්වය භාවිතා කරයි.

$$S \equiv \neg S \rightarrow F_0$$

(F_0 - විසංවාදය)

- **උදාහරණය 1:** $3n + 2$ ඔත්තේ නිඛිල සංඛ්‍යා වන විට n ඔත්තේ සංඛ්‍යාවක් බව සාධනය කරන්න.

- **උදාහරණය 2:** $\sqrt{2}$ අපරිමේය සංඛ්‍යාවක් බව සාධනය කරන්න.

- **උදාහරණය 3:** a,b අනුගාමී නිඛිල සංඛ්‍යා වන විට $a+b$ ඔත්තේ සංඛ්‍යාවක් බව සාධනය කරන්න.

3. ප්‍රතිවිරුද්ධය(Contrapositive)මඟින් සාධනය

$p \rightarrow q$, $\neg q \rightarrow \neg p$ සමාන වන බව අපි දන්නා කරුණකි. මෙහි දෙවන ප්‍රස්තුතය පළමු ප්‍රස්තුතයේ ප්‍රතිවිරුද්ධය යි.

සාම්ප්‍රදායික ඍජු සාධනය භාවිත කළ නොහැකි අවස්ථාවලදී මෙම ක්‍රමය ඵලදායී වේ.

උදාහරණය

$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$ බව ප්‍රත්‍යානයනය කරමු.

1. $\neg q$ සත්‍යය බව උපකල්පනය කරන්න.
2. $\neg p$ සත්‍යය වන බව සාධනය කරන්න.
3. ප්‍රතිවිරුද්ධය මඟින් $p \rightarrow q$ වන බව නිරීක්ෂණය කරන්න.

- තර්කානුකූලව ඍජු සාධනය, විසංවාදයක් මඟින් සාධනය සහ ප්‍රතිවිරුද්ධයක් මඟින් සාධනය එකිනෙකට සමාන වේ.

- එසේම සමාන්‍යයෙන් ඔබට විසංවාදයක් මඟින් සාධනයක් සොයා ගත හැකි නම් ප්‍රතිවිරුද්ධයක් මඟින් සාධනයක් ද සොයා ගත හැකි බව සත්‍යයකි.

- එයට හේතුව වන්නේ මෙම අවස්ථා දෙකේදීම සත්‍යය වන බව උපකල්පනය කිරීම සහ එම කරුණ මඟින් තර්ක කිරිමයි.

උදාහරණය 1: $3n + 2$ යනු ඔත්තේ පූර්ණ සංඛ්‍යාවක් නම්, n ඔත්තේ බව පෙන්වන්න.

උදාහරණය 2: a, b ධන වන විට, $n = a\,b$ නම්, $a \leq \sqrt{n}$ හෝ $b \leq \sqrt{n}$ බව පෙන්වන්න.

උදාහරණය 3: x^2 ඔත්තේ නම්, x ඔත්තේ වන බව පෙන්වන්න.

4. ගණිත අභ්‍යුහනය (Mathematical Induction)

ගණිත අභ්‍යුහනය භාවිතයෙන් සාධනය කිරීම යනු ඉතා ප්‍රබල සාධනීය ක්‍රමයකි. අප ආවර්තනමූල මඟින් අපරිමිත සාධක සංඛ්‍යාවක් පරිමිත අවකාශයකට ගෙන සාධනය කිරීම මෙමඟින් සිදු කෙරෙයි.

ගණිත අභ්‍යුහනයෙහි මූලික ක්‍රමය වන්නේ පළමුව ප්‍රස්තුතයක් ගොඩ නඟාගෙන එහි සත්‍යතාවය නිඛිල ශ්‍රිතයක් මඟින් සොයා ගැනීමයි.

අප ගොඩ නඟාගත් ප්‍රස්තුතයෙහි සත්‍යතාවය යම් ධන නිඛිලයකට සත්‍යය බව සාධනය කළ හැකි නම් එම ප්‍රස්තුතය සියලු ධන නිඛිලයන් සඳහා සත්‍යය බව ප්‍රකාශ කළ හැකිය.

1. මූලික අවස්ථාව ලෙස $p(x)$ යන ප්‍රස්තුතය සත්‍යය බව පෙන්වීම.

2. යම් n ධන සංඛ්‍යාවක් සඳහා $p(n)$ සත්‍යය බව උපකල්පනය කරන්න. මෙමඟින් $p(n+1)$ සත්‍යය බව සාධනය කරන්න.

3. ගණිත අභ්‍යුහන මූල ධර්මය යටතේ, සියලු ධන නිඛිල n සඳහා $p(x)$ යන ප්‍රස්තුතය සත්‍යය බව සාධනය කරන්න.

උදාහරණය 1: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, සියලුම n පූර්ණ සංඛ්‍යා සඳහා වලංගු බව පෙන්වන්න.

උදාහරණය 2: a හා b යනු අනුයාත සංඛ්‍යයා දෙකක් නම්, $a+b$ ඓක්‍යය ඔත්තේ සංඛ්‍යාවක් වේ.

5. සිද්ධි මඟින් සාධනය (Proof by cases)

සිද්ධි මගින් කරන ලද සාධනය පහත සමානත්වය භාවිතා කරයි.

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k) \rightarrow q$$
$$\equiv (p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_k \rightarrow q)$$

සමහර අවස්ථාවල, $p \rightarrow q$ සත්‍යය බව ඔප්පු කිරීම සඳහා, උපකල්පනය ලෙස p වෙනුවට සමාන විසම්බන්ධය (disjunction) $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_k$ භාවිතා කිරීමට පහසු විය හැකිය.

උදාහරණය: n, 3 න් නොබෙදෙන නිඛිල සංඛ්‍යාවක් වන විට, යම් k නිඛිල සංඛ්‍යාවක් සඳහා $n^2 = 3k + 1$ වන බව සාධනය කරන්න.

6. තුල්‍යතාවයෙහි සාධනය (Proof of Equivalence)

- ද්වි-කොන්දේසි සහිත ප්‍රකාශය ඔප්පු කරන විට, පහත සමානත්වය භාවිතා කළ හැකිය.

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

- සාමාන්‍යයෙන්, ප්‍රස්තුත (proposition) කිහිපයක් තුල්‍ය (equivalent) වන විට, පහත සමානත්වය භාවිතා කළ හැකිය.

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow p_k$$
$$\equiv (p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_k \rightarrow p_1)$$

- උදාහරණය: n නිඛිල සංඛ්‍යාව සඳහා පහත සඳහන් ප්‍රකාශ තුල්‍ය (equivalent) බව සාධනය කරන්න.

p:= n ඉරට්ටේ නිඛිල සංඛ්‍යාවකි.

q:= n-1 ඔත්තේ නිඛිල සංඛ්‍යාවකි.

r:= n^2 ඉරට්ටේ නිඛිල සංඛ්‍යාවකි.

සාධනයේදී සිදුවන පොදු වැරදි

උදාහරණය 1: $1 = 2$ බව පෙන්වන්න.

උදාහරණය 2: යම් n නිඛිලයක් සඳහා n^2 ඉරට්ටේ නම්, n ඉරට්ටේ බව පෙන්වන්න.

උදාහරණය 3: x තාත්වික සංඛ්‍යාවක් නම්, x^2 ධන බව පෙන්වන්න.

GOOD LUCK!